E.N.S.E.T. Section B' (programme T). MATHEMATIQUES (4 h) 1982

Dans tout le problème R, C désignent comme d'habitude, respectivement le corps des nombres réels et le corps des nombres complexes.

$\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs.

$\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

La dérivée d'une fonction F est notée F'.

I

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2 x\right) y = 0$$

Une fonction $y : x \longmapsto y(x)$ est dite solution de (E) sur un intervalle ouvert I de R, si :

$x \longmapsto y(x)$ est définie et deux fois dérivable dans I;

y vérifie (E) sur I.

1° Soit I l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Vérifier que la fonction $\varphi_1 : x \to \sqrt{\cos x}$ est solution de E sur I;

b. Achever sur I la résolution de (E);

c. Déterminer la fonction $f_{\lambda,\mu}$ solution de (E) sur I telle que :

$$f_{\lambda,\mu}(0) = \lambda \qquad \text{et} \qquad f'_{\lambda,\mu}(0) = \mu.$$

2° *a.* Soit φ une solution de (E) sur I. Montrer que la fonction $x \longmapsto \varphi(x + \pi)$ est solution de (E) sur un intervalle I' que l'on précisera;

b. En déduire la solution générale de (E) sur chacun des intervalles

$$I_k = \left]\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3° *a.* Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$\varphi_1 : x \longmapsto \sqrt{\cos x} \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

et $$\varphi_2 : x \longmapsto \sqrt{\cos x}\ \mathrm{Log}\left(\mathrm{tg}\left[\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right]\right) \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

On montrera que φ_2' admet un zéro unique x_0 dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ en étudiant par exemple le signe de φ_2'' sur cet intervalle.

Montrer qu'il existe un réel unique x_1 appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1)$. Situer ces nombres x_0 et x_1 l'un par rapport à l'autre.

b. On suppose λ, μ strictement positifs. Montrer que quels que soient λ, μ appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, il existe un réel x_2 unique dans $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que :

$$\frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(x_2)} = -\frac{\lambda}{\mu}$$

En déduire l'allure générale de la courbe représentative de $f_{\lambda,\mu}$ définie en (I, 1°, *c*) pour λ et μ positifs.

.../...

4° On désigne par S la suite des couples $(\lambda_k, \mu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ appartenant à $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que pour toute suite S, il existe une fonction notée F_s continue sur $\mathbb{R}$, dont la restriction à

$I_k =]\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ est la solution de (E) telle que :

$$F_s(k\pi) = \lambda_k \; ; \; F_s'(k\pi) = \mu_k .$$

b. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur la suite S pour que :

α. F_s soit paire;

β. F_s soit impaire;

γ. F_s soit périodique de période, multiple entier de π, donnée.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite S pour que l'intégrale $\int_0^\infty F_s(x)\,dx$ soit convergente.

5° *a.* Déterminer les valeurs de α et β telles que pour tout x de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\cos x \leqslant \alpha \cos x + \beta \cos^2 x \leqslant \sqrt{\cos x}.$$

b. On considère la fonction :

$$g_\alpha : x \longmapsto g_\alpha(x) = \sqrt{\cos x} - \alpha \cos x - (1-\alpha)\cos^2 x.$$

α étant un réel inférieur ou égal à $\frac{3}{2}$. Trouver la valeur de α pour laquelle $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_\alpha(x)\,dx$ est minimum.

c. Vérifier que $\sqrt{\cos x} \leqslant 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin^4 \frac{x}{2}$.

d. Déduire de *b.* et *c.* un encadrement de la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,dx$.

II

Préliminaires algébriques.

1° On note E_C, l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$f_1 : x \longmapsto e^{i\omega x} \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \longmapsto e^{-i\omega x}$$

où ω est une constante strictement positive réelle.

Montrer que E_C est de dimension 2 sur $\mathbb{C}$ et que f_1, f_2 en est une base.

Soit $\mathfrak{U}_C$ l'ensemble des endomorphismes de E_C dont les matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sur la base (f_1, f_2) vérifient les conditions suivantes. :

$$C_1 : |a|^2 - |b|^2 = |d|^2 - |c|^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad a\bar{c} - b\bar{d} = 0$$

$$C_2 : ad - bc = 1.$$

Soit U un endomorphisme de E_C. Pour tout $f = z_1 f_1 + z_2 f_2$ de E_C, on note : $U(f) = Z_1 f_1 + Z_2 f_2$.

a. Caractériser l'image matricielle sur (f_1, f_2) de U lorsque celui-ci laisse invariant l'application de E_C dans $\mathbb{R}$ qui à f fait correspondre $z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2$ (c'est-à-dire telle que : $Z_1\bar{Z}_1 - Z_2\bar{Z}_2 = z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2$).

b. Caractériser l'image matricielle sur (f_1, f_2) de U lorsque celui-ci laisse invariant l'application de $E_C \times E_C$ dans $\mathbb{C}$ qui à (f, f^*) fait correspondre $z_1 z_2^* - z_2 z_1^*$ (c'est-à-dire telle que $Z_1 Z_2^* - Z_2 Z_1^* = z_1 z_2^* - z_2 z_1^*$).

c. Déduire de *a.* et *b.* que $\mathfrak{U}_C$ forme un groupe multiplicatif.

.../...

2° *a.* Montrer que l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$e_1 : x \longmapsto \cos \omega x \qquad e_2 : x \longmapsto \sin \omega x$$

$$\omega \in]0, +\infty[$$

est confondu avec l'espace $E_{\mathbb{C}}$ précédent.

En déduire que (e_1, e_2) est une base de cet espace.

Déterminer la matrice de passage P de la base (f_1, f_2) vers la base (e_1, e_2).

b. Soit un endomorphisme U de $E_{\mathbb{C}}$, on désigne par A_U son image matricielle sur la base (e_1, e_2) et par B_U son image matricielle sur la base (f_1, f_2). On désigne par $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des matrices (2,2) à coefficients réels et de déterminant égal à + 1.

Montrer que pour tout U endomorphisme de $E_{\mathbb{C}}$

$$A_U \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}} \Rightarrow B_U \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}.$$

III

1° v étant une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$y'' + v(x)\, y = 0$$

φ_1 et φ_2 étant deux solutions indépendantes de cette équation, à valeurs réelles (respectivement complexes), on pose :

$$\Phi(x) = \lambda \varphi_1(x) + \mu \varphi_2(x) \qquad \left((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \text{ respectivement } \mathbb{C}^2\right).$$

a. Montrer que pour tout c appartenant à $]a, b[$ l'application $(\lambda, \mu) \longmapsto \left(\Phi(c), \Phi'(c)\right)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$). On désignera par $\mathfrak{M}(\varphi_1, \varphi_2, c)$ sa matrice.

b. Montrer que $\det \mathfrak{M}(\varphi_1, \varphi_2, c)$ est indépendant de c et différent de 0.

2° On considère les deux équations différentielles :

(1) $$y'' + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 x\right) y = 0 \qquad x \in]a, b[, \; -\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$$

(2) $$y'' + \frac{1}{2} y = 0 \qquad x \in \mathbb{R} -]a, b[$$

a. Montrer que, quels que soient les trois nombres réels x_0, y_0, y_0', il existe une fonction *réelle* G définie et continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée première G', dont la restriction à $]a, b[$ (respectivement à $\mathbb{R} -]a, b[$) est solution de (1) (respectivement (2)) et telle que :

$$G'(x_0) = y_0' \qquad \text{et} \qquad G(x_0) = y_0.$$

b. Posant

$$G(x) = A' e^{ix/\sqrt{2}} + B' e^{-ix/\sqrt{2}} \qquad x \leqslant a$$

$$G(x) = \lambda \varphi_1(x) + \mu \varphi_2(x) \qquad a < x < b$$

$$G(x) = A e^{ix/\sqrt{2}} + B e^{-ix/\sqrt{2}} \qquad x \geqslant b$$

où φ_1 et φ_2 sont les fonctions définies au I, 3° *a*.

Montrer que le couple (A, B) de $\mathbb{C}^2$ est l'image du couple (A', B') par un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice satisfait aux conditions C_1, C_2 du II, 1°.

(On pourra utiliser la propriété du II, 2° *b*.)

c. On suppose : $b = -a = x_0$ (x_0 défini au I, 3°, *a*).

Calculer la matrice de l'endomorphisme précédent et vérifier qu'elle satisfait aux conditions C_1 et C_2.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail